PM004 - Métodos Numéricos e Aplicações

`http://www.ime.unicamp.br/~campello/pm004`

Lista 2 - Sistemas Lineares e Não-Lineares
Data de Entrega: 03/10/2014

Os cálculos dos exercícios da lista podem (e devem) ser feitos com auxílio computacional, quando necessário.

Exercício 1. (Custos computacionais) Seja A uma matriz $n \times n$ não singular. Considere os problemas de calcular A^{-1} e de resolver um sistema linear $Ax = b$.

(a) Suponha que um oráculo divino nos disse quanto valia A^{-1}. Tendo esta informação, em quantas operações aritméticas conseguimos resolver $Ax = b$?

(b) Descreva uma maneira de calcular A^{-1} utilizando métodos para resolução de sistemas lineares. Mostre que a fatoração LU é um método "adequado" para realizar esta operação. Quantas operações aritméticas (somas/multiplicações) são realizadas?

(c) Compare o número de operações para resolver $Ax = b$ utilizando dois métodos: (i) fazendo eliminação Gaussiana (ou fatoração LU) e (ii) calculando a inversa A^{-1}. Ilustre essa comparação para $n = 10, 15, 100, 1000$. É vantajoso inverter a matriz, com o próposito de resolver um sistema linear?

Exercicio 2. Seja $\varepsilon > 0$ um parâmetro real Considere a matriz quadrada A e o vetor b dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon & -1 \\ -1 & 1+\varepsilon \end{bmatrix}, \qquad \text{e} \qquad b = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}.$$

(a) Escreva a iteração do método de Jacobi para o sistema acima, explicitando o problema de ponto fixo associado. É possível garantir a convergência (teórica) do método?

(b) O que ocorre com a iteração quando $\varepsilon \to 0$? Explique esse comportamento.

(c) O que ocorreria com os métodos da Eliminação Gaussiana para o sistema acima? Ilustre esse comportamento através da visualização gráfica do sistema.

Exercício 3. Seja $p(z) = z^3 - 1$ um polinômio na variável complexa z.

(a) Verifique que as raízes complexas de p são 1, $(-1 + i\sqrt{3})/2$ e $(-1 - i\sqrt{3})/2$

(b) Monte um sistema não-linear de equações equivalente a encontrar as raízes de z, indicando qual seria a iteração do Método de Newton.

(c) Encontre (experimentalmente) pontos para os quais o método converge para cada uma das três raízes.

Exercício 4. Considere as funções abaixo.

(a) $f(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 2)^2$.

(b) $f(x, y) = \cos x \sin y$.

Monte o sistema não-linear equivalente a minimizar $f(x, y)$, e utilize o método de Newton para encontrar uma solução aproximada (com erro de iterações sucessivas $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| < 10^{-7}$). De uma maneira geral, caso o método encontre uma solução, é possível garantir que esta seja um minimizador? Prove, ou dê um contra-exemplo.

Exercício 5. O sistema não-linear

$$\begin{cases} -\cos(xy) + 3x = \frac{1}{2} \\ x^2 - 625y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

possui matriz jacobiana singular na solução. Aplique o método de Newton partindo de diferentes pontos. Note que a convergência pode ser lenta (ou nem ocorrer), e explique.