PM004 - Métodos Numéricos e Aplicações

`http://www.ime.unicamp.br/~campello/pm004`

Lista 1 - Zeros de Funções Reais

Data de Entrega: 25/08/2014

Os cálculos dos exercícios da lista podem (e devem) ser feitos com auxílio computacional, quando necessário.

Exercício 1. Encontre um intervalo $[a, b]$ que contenha uma raiz das funções abaixo.

(a) $f(x) = \cos x - x$,

(b) $f(x) = x - 2^{-x}$,

(c) $f(x) = e^{x+2} - x^2$,

(d) $f(x) = x^6 - 10x^5 + 41x^4 - 88x^3 + 104x^2 - 64x + 16$,

Em cada caso, determine uma quantidade de iterações n para a qual o Método da Bissecção encontraria uma raiz com precisão de $\varepsilon = 10^{-2}$. Realize esta quantidade de iterações, calculando $|f(b)|$ e $|b - a|$ em cada iteração.

Comentários: Para descobrir o número de iterações, basta inverter a fórmula

$$\frac{b-a}{2^{k+1}} \leq 10^{-2}.$$

A partir daí, realiza-se as operações utilizando auxílio computacional. Na letra (d), a raíz não "troca" de sinal. Pode-se fatorar explicitamente o polinômio de modo a encontrar $f(x) = (x-2)^4(x-1)^2$. Caso quisessemos que a raiz trocasse de sinal, poderíamos encontrar a raiz, por exemplo, de $f(x) - 10^{-7}$ (ou qualquer perturbação pequena). Desde modo, satisfazemos o método da bissecção (e encontramos uma raiz "próxima" à real).

Exercício 2. Realize 4 iterações do Método de Newton e do Método da Bissecção na função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Qual dos métodos aproxima-se mais da raiz $x^* = 1$? Explique esse comportamento.

Para reflexão: Considere intervalos/pontos iniciais para os quais pareça "justa" a comparação. Um exemplo: $x_0 = 1.9$ e $[a_0, b_0] = [0, 1.9]$. Qual medida do erro nos dá uma comparação "justa"?

Comentários: Este é um exemplo em que o método de Newton "perde" para o método da bissecção quando a derivada de f é zero na raiz. Considerando os intervalos dados, a bissecção nos dá, após 5 iterações $x \approx 1.00938$, enquanto o método de Newton nos dá uma aproximação similar apenas depois de 10 iterações. Uma medida "justa" seria calcular, por exemplo, o quanto o erro diminuiu a cada iteração ($|x - x_{k+1}|/|x - x_k|$).

Exercício 3. A função

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

calcula a probabilidade de que uma variável com distribuição normal esteja entre 0 e x. Gostaríamos de determinar x tal que essa probabilidade seja 45%.

(a) Formule o problema de encontrar zeros de funções associado.

(b) Encontre um intervalo que contenha a raiz. Quantas iterações levaria para garantir que o método da Bissecção nos desse uma precisão de 10^{-5}?

(c) Monte a iteração do Método de Newton aplicado ao problema acima. Qual cálculo requer maior esforço computacional em cada iteração? Explique.

(d) Faça 3 iterações do Método de Newton, utilizando recurso computacional para o cálculo (c).

Comentários: Este exemplo é similar a qualquer exemplo de cálculo de zero de funções, exceto pelo fato de que a função $p(x)$ é complicada de se calcular. Em cada iteração do método, para calcular-se $p(x)$, necessita-se calcular uma integral. Precisamos encontrar o zero de $\bar{p}(x) = p(x) - 0.45$. Utilizando o método gráfico, vemos, por exemplo, que $\bar{p}(0) < 0$ e $\bar{p}(2) > 0$, e assim pode-se usar a bissecção. Depois de algumas iterações, encontra-se $x \approx 1.64485$.

Exercício 4. Uma maneira de contornar o cálculo da derivada no método de Newton é fixar $p = f'(x_0)$ e realizar as iterações

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{p}$$

(a) Dê uma interpretação gráfica para o método acima. Quais pontos iniciais não são apropriados para o método?

(b) Analise o método acima a partir do método do ponto fixo, aplicado em uma função $g(x) = x - A(x)f(x)$ apropriada. Sob quais condições podemos garantir convergência, e com qual ordem?

Comentários Este é um método do ponto fixo com $A(x) = 1/f'(x_0)$. Ele contorna o cálculo da derivada, mas, como é um método do ponto fixo com a função $A(x)$ constante só podemos garantir que a convergência seja linear. A interpretação é como a do método de Newton, entretanto, para a iteração seguinte traçamos uma reta com inclinação sempre constante $f'(x_0)$. O resultado serão retas em paralelo.

Exercício 5. (Adaptado de Burden & Faires) Utilize o Método de Newton e o Método da Secante para encontrar, com uma precisão de 10^{-4}, o ponto da função $y = x^2$ mais próximo de $(1, 0)$. (*Dica:* Minimize $d(x)^2$, onde $d(x)$ é a distância entre um ponto do gráfico (x, y) e $(1, 0)$).

Comentários: A distância de um ponto da parábola até $(1, 0)$, ao quadrado, é dada por $(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = (x - 1)^2 + x^2$. Para minimizar esta função, encontramos o zero de $d'(x) = 2x - 1$.

Exercício Bônus. Uma demonstração deste fato encontra-se, por exemplo, no link `http://www.math.drexel.edu/~tolya/300_secant.pdf`