PM004 - Métodos Numéricos e Aplicações

`http://www.ime.unicamp.br/~campello/pm004`

Lista 1 - Zeros de Funções Reais
Data de Entrega: 25/08/2014

Os cálculos dos exercícios da lista podem (e devem) ser feitos com auxílio computacional, quando necessário.

Exercício 1. Encontre um intervalo $[a, b]$ que contenha uma raiz das funções abaixo.

(a) $f(x) = \cos x - x$,
(b) $f(x) = x - 2^{-x}$,
(c) $f(x) = e^{x+2} - x^2$,
(d) $f(x) = x^6 - 10x^5 + 41x^4 - 88x^3 + 104x^2 - 64x + 16$,

Em cada caso, determine uma quantidade de iterações n para a qual o Método da Bissecção encontraria uma raiz com precisão de $\varepsilon = 10^{-2}$. Realize esta quantidade de iterações, calculando $|f(b)|$ e $|b - a|$ em cada iteração.

Exercício 2. Realize 4 iterações do Método de Newton e do Método da Bissecção na função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Qual dos métodos aproxima-se mais da raiz $x^* = 1$? Explique esse comportamento.

Para reflexão: Considere intervalos/pontos iniciais para os quais pareça "justa" a comparação. Um exemplo: $x_0 = 1.9$ e $[a_0, b_0] = [0, 1.9]$. Qual medida do erro nos dá uma comparação "justa"?

Exercício 3. A função

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

calcula a probabilidade de que uma variável com distribuição normal esteja entre 0 e x. Gostaríamos de determinar x tal que essa probabilidade seja 45%.

(a) Formule o problema de encontrar zeros de funções associado.
(b) Encontre um intervalo que contenha a raiz. Quantas iterações levaria para garantir que o método da Bissecção nos desse uma precisão de 10^{-5}?
(c) Monte a iteração do Método de Newton aplicado ao problema acima. Qual cálculo requer maior esforço computacional em cada iteração? Explique.

(d) Faça 3 iterações do Método de Newton, utilizando recurso computacional para o cálculo (c).

Exercício 4. Uma maneira de contornar o cálculo da derivada no método de Newton é fixar $p = f'(x_0)$ e realizar as iterações

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{p}$$

(a) Dê uma interpretação gráfica para o método acima. Quais pontos iniciais não são apropriados para o método?

(b) Analise o método acima a partir do método do ponto fixo, aplicado em uma função $g(x) = x - A(x)f(x)$ apropriada. Sob quais condições podemos garantir convergência, e com qual ordem?

Exercício 5. (Adaptado de Burden & Faires) Utilize o Método de Newton e o Método da Secante para encontrar, com uma precisão de 10^{-4}, o ponto da função $y = x^2$ mais próximo de $(1, 0)$. (*Dica:* Minimize $d(x)^2$, onde $d(x)$ é a distância entre um ponto do gráfico (x, y) e $(1, 0)$).

Exercício Bônus. Este exercício lhe concederá $+\delta$ extra na nota do módulo 1, em que $\delta > 0$. Considere o método da secante para encontrar o zero da uma função f, duas vezes diferenciável. Suponha que a sequência $x_1, \ldots, x_k, \ldots$ gerada pelo método converge para raiz x^*. O objetivo deste exercício é mostrar que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^\alpha} = C,$$

em que C é uma constante e $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Em outras palavras, o método converge com ordem α.

(a) Seja $e_k = x_k - x^*$ o erro da k-ésima iteração. A partir da fórmula para iteração do método, mostre que

$$e_{k+1} = e_k - \frac{f(x^* + e_k)(e_k - e_{k-1})}{f(x^* + e_k) - f(x^* + e_{k-1})}$$

(b) Expanda $f(x)$ em série de Taylor, em torno de x^*. Ignorando os termos ao quadrado (de segunda ordem), encontre uma estimativa para $f(x + e_k)$ e para a diferença $f(x^* + e_k) - f(x^* + e_{k-1})$.

(c) Mostre, usando (a) e (b), que $e_{k+1} \approx L e_k e_{k-1}$, onde L é uma constante.

(d) Supondo que $e_{k+1} \approx C e_k^\beta$, mostre que (c) implica necessariamente $\beta = \alpha = (1 + \sqrt{5})/2$.

(Obs: $f \approx g$ significa que $\lim(f/g) = 1$)

(e) $+2\delta$ na nota: determine L e C.